I- تقديم المجموعة $\mathbb{C}$:

1)- مبرهنة و تعريف:

توجد مجموعة يرمز لها بالرمز $\mathbb{C}$ تتضمن المجموعة $\mathbb{R}$ و تحتوي على عنصر غير حقيقي i بحيث $i^2=-1$ و لكل عنصر z من $\mathbb{C}$ يوجد زوج وحيد (a,b) من $\mathbb{R}^2$ بحيث $z=a+ib$.

- **إصطلاحات:**

عناصر المجموعة $\mathbb{C}$ تسمى أعدادا عقدية و الشكل $z=a+ib$ يسمى الكتابة الجبرية للعدد العقدي z ، العدد a يسمى الجزء الحقيقي ل z و b يسمى الجزء التخيلي نكتب :
$b=\mathrm{Im}(z)$ و $a=\mathrm{Re}(z)$.

إذا كان $a=0$ و $b\neq 0$ فإن $z=ib$ يسمى عددا عقديا تخيليا صرفا ، و هو عنصر من مجموعة الأعداد التخيلية الصرفة $i\mathbb{R}^*$ ، إذن : $i\mathbb{R}^*=\{ib / b\in\mathbb{R}^*\}$.

- **تساوي عددين عقديين:**

لكل (z,z') من $\mathbb{C}^2$ لدينا : $z=z' \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z)=\mathrm{Re}(z')$ و $\mathrm{Im}(z)=\mathrm{Im}(z')$

و بصفة خاصة : $z=0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z)=\mathrm{Im}(z)=0$

2)- الجمع و الضرب في $\mathbb{C}$:

- **تعريف:**

يمكن تمديد عمليتي الجمع و الضرب في $\mathbb{R}$ إلى المجموعة $\mathbb{C}$ بالكيفية التالية :

لكل $z=a+ib$ و $z'=a'+ib'$ من $\mathbb{C}$ نضع :

$z+z'=(a+a')+i(b+b')$ و $z.z'=(aa'-bb')+i(ab'+a'b)$.

- **ملحوظة:**

الجمع في $\mathbb{C}$ تجميعي ، تبادلي و يقبل عنصرا محايدا هو 0 و لكل عدد عقدي $z=a+ib$ مقابل هو : $-z=-a-ib$.

نعبر عن ذلك بالقول أن $(\mathbb{C},+)$ زمرة تبادلية .

و الضرب في $\mathbb{C}^*=\mathbb{C}-\{0\}$ تجميعي ، تبادلي و يقبل عنصرا محايدا هو 1 و لكل عدد عقدي غير منعدم $z=a+ib$ مقلوب هو : $\dfrac{1}{z}=\dfrac{a}{a^2+b^2}-i\dfrac{b}{a^2+b^2}$.

إذن $(\mathbb{C}^*,.)$ أيضا زمرة تبادلية .

و بما أن الضرب توزيعي بالنسبة للجمع فإننا نقول أن $(\mathbb{C},+,.)$ جسم تبادلي .

- **خاصية01:**

لكل (a,b) من $\mathbb{R}^2$ لدينا : $(a+ib)(a-ib)=a^2+b^2$

و لكل عددين عقديين $z=a+ib$ و $z'=a'+ib'$ بحيث $z'\neq 0$ لدينا :

$$\frac{z}{z'}=\frac{aa'+bb'}{a'^2+b'^2}+i\,\frac{a'b-ab'}{a'^2+b'^2} .$$

- **تمرين01:**

أ- أكتب على الشكل الجبري الأعداد العقدية التالية :

$z_0=(2+3i)(3-4i)$ و $z_1=i(1-2i)^3$ و $z_2=(2+i)^3+(1-2i)^3$

و $z_3=\dfrac{5+3\sqrt{3}i}{1-2\sqrt{3}i}$ و $z_4=\left(\dfrac{2-3i}{3+2i}\right)^3$ و $z_5=\dfrac{(1+i)^3}{1-i}+\dfrac{(1-i)^4}{(1+i)^2}$.

ب- ليكن n عددا صحيحا طبيعيا ، أكتب على الشكل الجبري i^{4n} و i^{4n+1} و i^{4n+2} و i^{4n+3} ثم إستنتج i^{2006} و i^{2007} و i^{2008} و i^{2009} .

ج- حدد المجموعين S_1 و S_2 حيث : $S_1=\sum_{k=0}^{2009} i^k$ و $S_2=\sum_{k=0}^{2010}(-i)^k$.

3)- مرافق عدد عقدي:

- **تعريف:**

ليكن $z=a+ib$ عنصرا من $\mathbb{C}$ ، العدد العقدي $a-ib$ يسمى مرافق z و يرمز له بالرمز $\overline{z}$ ، إذن $\overline{z}=a-ib$.

- **ملحوظة:**

لكل z من $\mathbb{C}$ لدينا : $\overline{\overline{z}}=z$ ، هذا يعني أن التطبيق $\varphi : z\in\mathbb{C}\mapsto \overline{z}\in\mathbb{C}$ تقابل تقابله العكسي نفسه $\varphi^{-1}=\varphi$.

- **تمرين02:**

حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E): z^2-4\overline{z}+4=0$.

- **خاصية02:**

مهما يكن z من $\mathbb{C}$ لدينا : $\mathrm{Re}(z)=\dfrac{z+\overline{z}}{2}$ و $b=\mathrm{Im}(z)=\dfrac{z-\overline{z}}{2i}$.

إذن : $z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow \mathrm{Im}(z)=0\Leftrightarrow \overline{z}=z$ و $z\in i\mathbb{R}\Leftrightarrow \mathrm{Re}(z)=0\Leftrightarrow \overline{z}=-z$.

لكل عددين عقديين z_1 و z_2 لدينا :

$\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$ و $\overline{z_1.z_2}=\overline{z_1}.\overline{z_2}$ و إذا كان $\alpha\in\mathbb{R}$ فإن : $\overline{\alpha.z_1}=\alpha.\overline{z_1}$.

و إذا كان $z_2\neq 0$ فإن : $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ و $\overline{\left(\frac{1}{z_2}\right)}=\frac{1}{\overline{z_2}}$.

و بصفة خاصة ، لكل z من $\mathbb{C}^*$ و لكل n من $\mathbb{Z}^*$ لدينا : $\overline{z^n}=\left(\overline{z}\right)^n$.

II- التمثيل الهندسي و معيار عدد عقدي:

المستوى المتجهي V_2 منسوب إلى أساس متعامد و ممنظم $\left(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\right)$ و المستوى الموجه (P) منسوب إلى معلم متعامد و ممنظم $\left(O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\right)$.

$M(x,y)$ تشير إلى النقطة M و زوج إحداثيتيها (x,y) في المعلم $\left(O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\right)$.

1)- صورة عدد عقدي و لحق نقطة أو متجهة:

- **تعريف01:**

لكل عدد عقدي $z=x+iy$ النقطة $M(x,y)$ تسمى صورة العدد z

و عكسيا ، لكل نقطة $M(x,y)$ من (P) العدد العقدي $z=x+iy$ يسمى لحق النقطة M

نكتب : $z=aff(M)$ أو باختصار $M(z)$.

المستقيم $\left(O,\overrightarrow{e_1}\right)$ يسمى المحور الحقيقي ، $\left(O,\overrightarrow{e_2}\right)$ يسمى المحور التخيلي و (P) يسمى المستوى العقدي .

- **ملحوظة:**

لدينا : $z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow M(z)\in(Ox)$ و $z\in i\mathbb{R}\Leftrightarrow M(z)\in(Oy)$.

و بصفة خاصة : $z\in\mathbb{R}_+\Leftrightarrow M(z)\in[Ox)$ و $z\in\mathbb{R}_-\Leftrightarrow M(z)\in[Ox')$

$z\in i\mathbb{R}_+\Leftrightarrow M(z)\in[Oy)$ و $z\in i\mathbb{R}_-\Leftrightarrow M(z)\in[Oy')$.

- **تعريف02:**

لكل عدد عقدي $z=x+iy$ المتجهة $\vec{u}(x,y)$ تسمى صورة العدد z ، و عكسيا لكل متجهة $\vec{u}(x,y)$ من V_2 العدد العقدي $z=x+iy$ يسمى لحق $\vec{u}$ و نكتب : $z=aff\left(\vec{u}\right)$.

إذن لكل نقطة M من (P) لدينا : $aff\left(\overrightarrow{OM}\right)=aff(M)$.

- **خاصية03:**

مهما تكن المتجهتان $\overrightarrow{u_1}$ و $\overrightarrow{u_2}$ و العددان الحقيقيان α و β لدينا :

$aff\left(\overrightarrow{u_1}+\overrightarrow{u_2}\right)=aff\left(\overrightarrow{u_1}\right)+aff\left(\overrightarrow{u_2}\right)$ و $aff\left(\alpha\overrightarrow{u_1}\right)=\alpha.aff\left(\overrightarrow{u_1}\right)$

و بصفة عامة : $aff\left(\alpha\overrightarrow{u_1}+\beta\overrightarrow{u_2}\right)=\alpha.aff\left(\overrightarrow{u_1}\right)+\beta.aff\left(\overrightarrow{u_2}\right)$.

و لكل نقطتين A و B من المستوى العقدي (P) لدينا :

$aff\left(\overrightarrow{AB}\right)=aff\left(\overrightarrow{OB}\right)-aff\left(\overrightarrow{OA}\right)=aff(B)-aff(A)$.

- **خاصية04:**

إذا كانت النقطة G مرجحا للنظمة المتزنة $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$ حيث $\alpha+\beta\neq 0$

فإن : $aff(G)=\dfrac{\alpha.aff(A)+\beta.aff(B)}{\alpha+\beta}$.

بصفة خاصة إذا كان I هو منتصف $[AB]$ فإن : $aff(I)=\dfrac{aff(A)+aff(B)}{2}$.

2)- الصيغة العقدية لبعض التحويلات:

لكل تطبيق f من $\mathbb{C}$ نحو $\mathbb{C}$ ، نعتبر التحويل T الذي يربط كل نقطة $M(z)$ من (P) بالنقطة $M'(z')$ من (P) بحيث : $z'=f(z)$.

و الجدول التالي يلخص طبيعة التحويل T تبعا للصيغة العقدية للتطبيق f :

صيغة التطبيق f	صيغة التحويل T	طبيعة التحويل T
$z'=z+z_0$	$\overrightarrow{MM'}=\vec{u}\,/\,z_0=aff\left(\vec{u}\right)$	إزاحة متجهتها $\vec{u}$
$z'=k(z-\omega)+\omega$	$\overrightarrow{\Omega M'}=k\,\overrightarrow{\Omega M}\,/\,\omega=\text{aff}(\Omega)$	تحاك مركزه Ω و نسبته k
$z'=-z$	O منتصف القطعة $[MM']$	تماثل مركزي مركزه O
$z'=\overline{z}$	$\left(O,\overrightarrow{e_1}\right)$ واسط القطعة $[MM']$	تماثل محوري محوره (Ox)
$z'=-\overline{z}$	$\left(O,\overrightarrow{e_2}\right)$ واسط القطعة $[MM']$	تماثل محوري محوره (Oy)
$z'=i.\overline{z}$	$(D):y=x$ واسط $[MM']$	تماثل محوري محوره (D)

- **إستنتاج:**

نستنتج إذن أن الرباعي الذي رؤوسه النقط $M(z)$ و $M(\overline{z})$ و $M(-z)$ و $M(-\overline{z})$

مستطيل مركزه النقطة O مهما يكن z من $\mathbb{C}-(\mathbb{R}\cup i\mathbb{R})$.

و يكون هذا المستطيل مربعا إذا و فقط إذا كان : $\operatorname{Re}(z)=\operatorname{Im}(z)$.

- **تمرين03:**

حدد طبيعة التحويل T (وعناصره المميزه) الذي يربط النقطة $M(z)$ بالنقطة $M'(z')$

حيث : $z'=-6z+2-3i$.

بين أولا أن التحويل T يقبل نقطة صامدة وحيدة Ω و حدد لحقها ω ، ثم تحقق من أن :

$$\forall z\in\mathbb{C}: z'=-6(z-\omega)+\omega$$

و يكون بذلك التحويل T تحاكيا مركزه Ω و نسبته $k=-6$.

3)- معيار عدد عقدي:

- **تعريف:**

ليكن $z=x+iy$ عددا عقديا و M نقطة من (P) لحقها z

العدد الموجب $\left\|\overrightarrow{OM}\right\|=\sqrt{x^2+y^2}$ يسمى معيار العدد العقدي z و يرمز له بالرمز $|z|$

إذن : $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$.

- **ملحوظة:**

لكل $z=x+iy$ من $\mathbb{C}$ لدينا : $z.\overline{z}=x^2+y^2$ إذن : $|z|=\sqrt{z.\overline{z}}$

و من جهة أخرى ، لكل نقطتين A و B من (P) لدينا : $AB=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=|z_B-z_A|$.

- **خاصية05:**

. لكل z من $\mathbb{C}$ لدينا :

$$|\overline{z}|=|-\overline{z}|=|-z|=|z| \quad و \quad \operatorname{Im}(z)\le|\operatorname{Im}(z)|\le|z| \quad و \quad \operatorname{Re}(z)\le|\operatorname{Re}(z)|\le|z|$$

$$|z|=0 \Leftrightarrow z=0 \quad و \quad |z|=1 \Leftrightarrow z^{-1}=\overline{z} \ .$$

. لكل عددين عقديين z_1 و z_2 لدينا :

$|z_1.z_2|=|z_1|.|z_2|$ و إذا كان $z_2\neq 0$ فإن : $\left|\dfrac{1}{z_2}\right|=\dfrac{1}{|z_2|}$ و $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$.

- **ملحوظة:**

نعتبر المجموعة : $U=\{z\in\mathbb{C}/|z|=1\}$

لكل z من U لدينا : $\left\{-z,\overline{z}=\dfrac{1}{z},-\overline{z}\right\}\subset U$ و $z^n\in U$ لكل n من $\mathbb{Z}$.

و لكل z_1 و z_2 من U لدينا : $z_1.z_2\in U$ و $\dfrac{z_1}{z_2}\in U$.

- **خاصية06:**

لكل عددين عقديين z_1 و z_2 لدينا : $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$ و $|z_1-z_2|\le|z_1|+|z_2|$

و بصفة عامة : $\big||z_1|-|z_2|\big|\le|z_1\pm z_2|\le|z_1|+|z_2|$.

- **تمرين04:** بين أن :

$$\begin{cases}|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2| \Leftrightarrow \exists\alpha\in\mathbb{R}_+/z_2=\alpha.z_1\\ |z_1-z_2|=|z_1|+|z_2| \Leftrightarrow \exists\alpha\in\mathbb{R}_-/z_2=\alpha.z_1\end{cases}$$

- **تمرين05:**

أ- حدد معيار العدد العقدي z حيث : $z=\dfrac{3i(3-4i)^2}{(\sqrt{5}-2i)(1+\sqrt{3}i)^3}$.

ب- لكل z من $\mathbb{C}-\{2i\}$ نضع : $z'=\dfrac{z-3}{z-2i}$ ، حدد ثم أنشىء في المستوى العقدي

(P) المنسوب إلى معلم متعامد و ممنظم $(O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$ المجموعات التالية :

$(\Gamma_1)=\{M(z)\in(\mathrm{P})/z'\in\mathbb{R}\}$ و $(\Gamma_2)=\{M(z)\in(\mathrm{P})/z'\in i\mathbb{R}\}$

و $(\Gamma_3)=\{M(z)\in(\mathrm{P})/|z'|=1\}$.

ج- لكل z من $\mathbb{C}-\mathbb{R}$ نضع : $z''=\dfrac{2z-i}{z-\overline{z}}$، حدد ثم أنشىء في المستوى (P) المجموعتين :

$(\Sigma_1)=\{M(z)\in(\mathrm{P})/z''\in i\mathbb{R}\}$ و $(\Sigma_1)=\{M(z)\in(\mathrm{P})/|z''|=1\}$.

- **تمرين06:**

حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلتين :

$(E_1): z^2+2|z|^2-3=0$ و $(E_2): z+3.\overline{z}=(2+\sqrt{3}i)|z|$.

III- الشكل المثلثي لعدد عقدي غير منعدم:

المستوى العقدي (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $\left(O,\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$.

1)- عمدة عدد عقدي غير منعدم:

- **تعريف:**

ليكن z عددا عقديا غير منعدم و M نقطة من (P) لحقها z ، كل قياس للزاوية الموجهة $\left(\widehat{\vec{e_1},\overrightarrow{OM}}\right)$ يسمى عمدة العدد العقدي z و يرمز له بالرمز $\arg(z)$

إذن : $\arg(z)\equiv\left(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{OM}\right)[2\pi]$.

- **حالات خاصة:**

مهما يكن z من $\mathbb{C}^*$ لدينا :

$z\in\mathbb{R}_+^*\Leftrightarrow\arg(z)\equiv0[2\pi]$ و $z\in\mathbb{R}_-^*\Leftrightarrow\arg(z)\equiv\pi[2\pi]$

و بصفة عامة : $z\in\mathbb{R}^*\Leftrightarrow\arg(z)\equiv0[\pi]$.

$z\in i\mathbb{R}_+^*\Leftrightarrow\arg(z)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ و $z\in i\mathbb{R}_-^*\Leftrightarrow\arg(z)\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]$

و بصفة عامة : $z\in i\mathbb{R}^*\Leftrightarrow\arg(z)\equiv\frac{\pi}{2}[\pi]$.

- **خاصية07:**

كل عدد عقدي غير منعدم z يكتب بكيفية وحيدة على شكل $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

حيث : $r=|z|$ و $\theta\equiv\arg(z)[2\pi]$.

نكتب باختصار $z=[r,\theta]$ و تسمى هذه الكتابة بالشكل المثلثي للعدد العقدي z .

- **ملحوظة:**

إذا كان $z=x+iy$ فإن :

$r=\sqrt{x^2+y^2}$ و θ عدد حقيقي بحيث : $\cos\theta=\frac{x}{r}$ و $\sin\theta=\frac{y}{r}$.

- **خاصية08:**

لكل (x,y) من $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ لدينا : $x=[x,0]$ و $iy=\left[y,\frac{\pi}{2}\right]$.

و لكل (x,y) من $]-\infty,0[\times]-\infty,0[$ لدينا : $x=[-x,\pi]$ و $iy=\left[-y,-\frac{\pi}{2}\right]$.

- **خاصية09:**

لكل عددين عقديين غير منعدمين z_1 و z_2 لدينا :

$$z_1=z_2\Leftrightarrow\begin{cases}|z_1|=|z_2|\\ \arg(z_1)\equiv\arg(z_2)[2\pi]\end{cases}$$

$\arg(z_1.z_2)\equiv\arg(z_1)+\arg(z_2)[2\pi]$ و $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)\equiv\arg(z_1)-\arg(z_2)[2\pi]$

و $\arg(z^n)\equiv n.\arg(z)[2\pi]$ لكل z من $\mathbb{C}^*$ و n من $\mathbb{Z}$.

وبصفة خاصة : $\arg\left(\frac{1}{z}\right)\equiv-\arg(z)[2\pi]$ و $\arg(-z)\equiv\pi+\arg(z)[2\pi]$

و لدينا أيضا : $\arg(\bar{z})\equiv-\arg(z)[2\pi]$ (لأن $\frac{1}{z}=\frac{\bar{z}}{|z|^2}$) .

- **ملحوظة:**

إذا كان $\alpha>0$ فإن :

$\arg(\alpha.z)\equiv\arg(z)[2\pi]$ و $\arg\left(\frac{\alpha}{z}\right)\equiv-\arg(z)[2\pi]$

أما إذا كان $\alpha<0$ فإن :

$\arg(\alpha.z)\equiv\pi+\arg(z)[2\pi]$ و $\arg\left(\frac{\alpha}{z}\right)\equiv\pi-\arg(z)[2\pi]$.

- **تمرين07:**

أ- حدد معيار و عمدة العدد العقدي $z_0=\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}$ ، ثم إستنتج $\cos\frac{5\pi}{12}$ و $\sin\frac{5\pi}{12}$.

ب- أكتب على الشكل المثلثي العددين العقديين $z_1=\frac{1-\sqrt{3}i}{4}$ و $z_2=\frac{\sqrt{3}+i}{4}$ ، ثم

إستنتج معيار و عمدة العددين العقديين : $u=z_1+z_2$ و $v=z_1-z_2$.

ج- أ- نعتبر العدد العقدي $z=\sqrt{2-\sqrt{3}}-i\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

أحسب z^2 و حدد معياره و عمدته ، ثم إستنتج معيار و عمدة z .

- **تمرين08:**

أ- أكتب تبعا لقيم العدد θ من المجال $]-\pi,\pi[$ الشكل المثلثي للعدد العقدي z_θ حيث :

$z_\theta = 1-\cos\theta + i\sin\theta$.

ب- أكتب تبعا لقيم العدد α الشكل المثلثي للعدد العقدي z_α حيث : $z_\alpha = \dfrac{1}{1+i\tan\alpha}$

و $\alpha \in [-\pi,\pi[- \left\{-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right\}$.

ج- حدد مجموعة قيم العدد الصحيح النسبي n التي يكون من أجلها على التوالي :

$(1):\left(\sqrt{3}+i\right)^n \in \mathbb{R}_+^*$ ، $(2):\left(\sqrt{3}+i\right)^n \in \mathbb{R}_-^*$ و $(3):\left(\sqrt{3}+i\right)^n \in i\mathbb{R}^*$.

د- حدد ثم أنشىء في المستوى العقدي (P) المجموعة (Γ) للنقط $M(z)$ التي تحقق :

$\arg(z-2i+1) \equiv -\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$.

2)- الزاوية الموجهة لمتجهتين و عمدة خارج لحقيهما:

- **خاصية10:**

لكل نقطتين مختلفتين A و B من (P) لدينا : $\left(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{AB}\right) \equiv \arg(z_B - z_A)[2\pi]$

و لكل أربع نقط A و B و C و D من (P) بحيث : $A \neq B$ و $C \neq D$ لدينا :

$$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)[2\pi]$$

و بصفة خاصة إذا كانت A و B و C ثلاث نقط مختلفة مثنى مثنى من (P) فإن :

$$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)[2\pi] .$$

- **إستنتاجات:**

لتكن A و B و C ثلاث نقط من (P) مختلفة مثنى مثنى .

تكون النقط A و B و C مستقيمية إذا و فقط إذا كان : $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}^*$.

ويكون المثلث ABC قائم الزاوية في A إذا و فقط إذا كان : $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}^*$.

ويكون المثلث ABC قائما و متساوي الساقين رأسه A إذا وفقط إذا كان: $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \pm i$.

ويكون المثلث ABC متساوي الأضلاع إذا و فقط إذا كان : $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[1, \pm\dfrac{\pi}{3}\right]$.

- **تمرين09:**

أ- نعتبر النقط $A(2+3i)$ و $B(4-i)$ و $C(10+2i)$.

بين أن المثلث ABC قائم الزاوية في B .

ب- بين أن المعادلة $(E): z^2 - 2\overline{z} + 1 = 0$ تقبل في المجموعة $\mathbb{C}$ ثلاث حلول ، و حدد طبيعة المثلث ABC الذي ألحاق رؤوسه حلول المعادلة (E) .

ج- حدد ثم أنشىء المجموعة (Σ) للنقط $M(z)$ من المستوى العقدي (P) التي تكون من أجلها النقط $M(z)$ و $N(i\overline{z})$ و $P(-3i)$ مستقيمية .

- **خاصية11:**

ليكن $ABCD$ متوازي أضلاع ($z_B - z_A = z_C - z_D$) .

يكون $ABCD$ مستطيلا إذا و فقط إذا كان : $\dfrac{z_D - z_A}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}^*$.

و يكون $ABCD$ معينا إذا و فقط إذا كان : $\dfrac{z_D - z_B}{z_C - z_A} \in i\mathbb{R}^*$.

و يكون مربعا إذا و فقط إذا كان : $\dfrac{z_D - z_A}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}^*$ و $\dfrac{z_D - z_B}{z_C - z_A} \in i\mathbb{R}^*$.

- **تمرين10:**

أ- نعتبر النقط $A(2i)$ و $B\left(\sqrt{3}+i\right)$ و $C\left(\sqrt{3}-i\right)$.

بين أن الرباعي $OABC$ معين .

ب- نعتبر النقط $A(-2+5i)$ و $B(3+2i)$ و $C(6+7i)$ و $D(1+10i)$.

بين أن الرباعي $ABCD$ مربع .

IV- المعادلات من الدرجة الثانية في $\mathbb{C}$:

1)- حل المعادلة $z^2=a$ حيث $a\in\mathbb{C}^*$:

لتكن S مجموعة حلول المعادلة $(E): z^2=a$ في $\mathbb{C}$ حيث $a\in\mathbb{C}^*$.

- إذا كان $a\in\mathbb{R}_+^*$ فإن : $S=\left\{-\sqrt{a},\sqrt{a}\right\}$

- إذا كان $a\in\mathbb{R}_-^*$ فإن : $(E)\Leftrightarrow z^2=\left(i\sqrt{-a}\right)^2 \Leftrightarrow \left(z+i\sqrt{-a}\right)\left(z-i\sqrt{-a}\right)=0$

إذن : $S=\left\{-i\sqrt{-a}, i\sqrt{-a}\right\}$.

نقول إن العددين العقديين $z_1=-i\sqrt{-a}$ و $z_2=i\sqrt{-a}$ هما الجذرين المربعين للعدد الحقيقي السالب a .

- إذا كان $a\in\mathbb{C}-\mathbb{R}$ أي أن $a\notin\mathbb{R}$ ،

نضع : $a=\alpha+i\beta$ حيث $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ و $z=x+iy$

إذن : $(E)\Leftrightarrow (x+iy)^2=\alpha+i\beta \Leftrightarrow x^2-y^2+2ixy=\alpha+i\beta$

أي أن : $(E)\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-y^2=\alpha\\ 2xy=\beta\end{cases}$.

و بما أن $z^2=a$ فإن : $|z|^2=|a|$ أي أن : $x^2+y^2=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$.

و بالتالي فإن : $(E)\Leftrightarrow\begin{cases}(1): x^2+y^2=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\\ (2): x^2-y^2=\alpha\\ (3): 2xy=\beta\end{cases}$.

لاحظ أن $\beta\in\mathbb{R}^*$ و أن إشارته تحدد ما إذا كان ل x و y نفس الإشارة أو إشارة مختلفة .

نستعمل المعادلتين (1) و(2) فنحصل على :

$$x^2=\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}>0 \quad \text{و} \quad y^2=\frac{-\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}>0$$

إذن : $x=\pm\sqrt{\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}}$ و $y=\pm\sqrt{\frac{-\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}}$

ثم نستعمل المعادلة (3) : $\beta<0\Rightarrow xy<0$ و $\beta>0\Rightarrow xy>0$.

- **مبرهنة:**

لكل عدد عقدي غير منعدم a جذرين مربعين متقابلان هما حلي المعادلة $(E): z^2=a$ في المجموعة $\mathbb{C}$.

- **أمثلة:**

- للعدد الحقيقي السالب $a=-4$ جذرين مربعين عقديين (تخيليين صرفين) هما : $z_1=-2i$ و $z_2=2i$.

الجذرين المربعين للعدد -8 هما : $z_1=-2\sqrt{2}i$ و $z_2=2\sqrt{2}i$.

- لنحدد الجذرين المربعين للعدد العقدي $a=4-3i$:

نضع : $z=x+iy$ ، إذن : $z^2=4-3i\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2=\sqrt{4^2+(-3)^2}\\ x^2-y^2=4\\ 2xy=-3\end{cases}$

بمعنى أن : $2x^2=9$ و $2y^2=1$ و $xy<0$.

أي : $(x,y)=\left(\frac{3\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ أو $(x,y)=\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

إذن الجذرين المربعين ل $a=4-3i$ هما : $z_1=\frac{\sqrt{2}}{2}(3-i)$ و $z_2=\frac{\sqrt{2}}{2}(-3+i)$.

- لتحديد الجذرين المربعين للعدد $a=1+\sqrt{3}i$ ، نكتب a على الشكل المثلثي :

$a=\left[2,\frac{\pi}{3}\right]$ و نضع : $z=[r,\theta]$ ، إذن : $z^2=a\Leftrightarrow\left[r^2,2\theta\right]=\left[2,\frac{\pi}{3}\right]$

و هذا يعني أن : $r^2=2$ و $2\theta\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$ أي أن : $r=\sqrt{2}$ و $\theta\equiv\frac{\pi}{6}[\pi]$.

إذن الجذرين المربعين ل a هما : $z_1=\left[\sqrt{2},\frac{\pi}{6}\right]$ و $z_2=\left[\sqrt{2},-\frac{5\pi}{6}\right]$

$z_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{3}+i\right)$ و $z_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{3}+i\right)$.

- **تمرين11:** حدد الجذرين المربعين للعددين العقديين : $u=1-2\sqrt{3}i$ و $v=-5+12i$.

2)- حل المعادلة $(E): az^2+bz+c=0$ **حيث** $a\in\mathbb{C}^*$ و $(b,c)\in\mathbb{C}^2$:

مهما يكن z من $\mathbb{C}$ لدينا : $az^2+bz+c=a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$ حيث $\Delta=b^2-4ac$

إذا كان $\Delta=0$ فالمعادلة (E) تقبل حلا وحيدا $z_0=-\frac{b}{2a}$.

و إذا كان $\Delta\neq 0$ فإنه يقبل جذرين مربعين δ و $-\delta$ (عقديين في حالة $\Delta\in\mathbb{C}-\mathbb{R}_+$)

و لدينا : $az^2+bz+c=a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\delta}{2a}\right)^2\right]$.

إذن : $(E)\Leftrightarrow a\left(z-\frac{-b-\delta}{2a}\right)\left(z-\frac{-b+\delta}{2a}\right)=0$

و المعادلة (E) تقبل حلين مختلفين هما : $z_1=\frac{-b-\delta}{2a}$ و $z_2=\frac{-b+\delta}{2a}$.

- **ملخص:**

لتكن S مجموعة حلول المعادلة : $(E): az^2+bz+c=0$ في المجموعة $\mathbb{C}$

و $\Delta=b^2-4ac$ مميزها .

إذا كان $\Delta=0$ فإن : $S=\left\{-\frac{b}{2a}\right\}$.

و إذا كان $\Delta\neq 0$ فإن $S=\left\{\frac{-b-\delta}{2a},\frac{-b+\delta}{2a}\right\}$ ، حيث δ هو أحد جذري المميز Δ .

- **ملحوظة:**

إذا كانت معاملات المعادلة (E) أعداد حقيقية و كان $\Delta<0$ فإن أحد جذري Δ هو $\delta=i\sqrt{-\Delta}$ و حلي المعادلة (E) عددين عقديين مترافقين و هما :

$z_1=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ و $z_2=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ ($z_2=\overline{z_1}$)

- **تمرين12:**

حل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلات التالية :

$(1): z^2-30z+289=0$ و $(2): z^2-6z+9-6i=0$

$(3): iz^2+(2i-1)z-\left(1+\frac{i}{4}\right)=0$ و $(4):(1+i)z^2-3z+2(1-i)=0$

و $(5): z^2-2i.z+\left(1+2\sqrt{3}i\right)=0$.

- **تمرين13:**

أ- لتكن S_1 مجموعة حلول المعادلة : $(E_1): z^4+16=0$ ، و S_2 مجموعة حلول المعادلة : $(E_2):(z-2i)^4+16=0$.

حدد S_1 ثم إستنتج S_2 ، ثم بين صور S_2 في المستوى العقدي (P) رؤوس مربع يتم إنشائه .

ب- حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E_3): z^4-2z\cos\theta+1=0$ حيث $0<\theta<\pi$.

ج- بين أن المعادلة : $(E): z^2-2(\lambda\cos\theta+i\sin\theta)z+1-\lambda^2=0$ تقبل حلين مختلفين z_1 و z_2 يتم تحديدهما (لكل (λ,θ) من $\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$) ، ثم أكتب z_1 و z_2 على الشكل المثلثي .

V- صيغة موافر - الترميز الأسي لعدد عقدي غير منعدم:

1)- صيغة موافر:

- **خاصية12:**

لكل θ من $\mathbb{R}$ و لكل n من $\mathbb{Z}$ لدينا : $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$.

- **مثال:**

أحسب : $\left(\cos\frac{\pi}{9}+i\sin\frac{\pi}{9}\right)^{2007}$ و $\left(-\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right)^{-370}$.

- **ملحوظة:**

إذا كان : $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ فإن : $\forall n\in\mathbb{Z}: z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$

- **مثال:**

أكتب على الشكل المثلثي العدد $z=\sqrt[6]{243}+i\sqrt[3]{3}$ ، ثم إستنتج z^{-9} .

- **تطبيقات:** حساب $\cos n\theta$ و $\sin n\theta$ حيث $n\in\mathbb{N}$ و $n\geq 2$:

لدينا من جهة : $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$

و من جهة أخرى : $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\sum_{k=0}^{n} i^k C_n^k \cos^{n-k}\theta\sin^k\theta$ (صيغة الحدانية)

و منهما معا نستنتج أن :

$\cos n\theta = \operatorname{Re}(Z)$ و $\sin n\theta = \operatorname{Im}(Z)$ ، حيث $Z = \sum_{k=0}^{n} i^k C_n^k \cos^{n-k}\theta \sin^k \theta$

و لاحظ أنه يجب إستعمال مثلث باسكال لتحديد المعاملات C_n^k حيث $0 \le k \le n$.

- **تمرين14:**

بين أن : $\cos 5\theta = \cos^5\theta - 10\cos^3\theta \sin^2\theta + 5\cos\theta \sin^4\theta$

و $\sin 5\theta = \sin^5\theta - 10\sin^3\theta\cos^2\theta + 5\sin\theta\cos^4\theta$.

2)- الترميز الأسي لعدد عقدي غير منعدم:

نعلم أنه لكل عدد عقدي غير منعدم z يوجد زوج وحيد (r,θ) من $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ بحيث :

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ، حيث $r = |z|$ و $\theta \equiv \arg(z)[2\pi]$.

نضع : $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

فيصبح لدينا : $z = re^{i\theta}$ و تسمى هذه الكتابة كتابة على الشكل الأسي للعدد العقدي z .

- **أمثلة:**

$-1 = e^{i\pi}$ و $-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$ و $1-i = \sqrt{2}.e^{-i\frac{\pi}{4}}$ و $3-\sqrt{3}i = 2\sqrt{3}.e^{i\frac{\pi}{6}}$.

- **خاصية13:**

لكل عددين عقديين غير منعدمين $z_1 = r_1.e^{i\theta_1}$ و $z_2 = r_2.e^{i\theta_2}$

لدينا : $z_1.z_2 = r_1r_2.e^{i(\theta_1+\theta_2)}$ و $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}.e^{i(\theta_1-\theta_2)}$

و لكل $z = r.e^{i\theta}$ من $\mathbb{C}^*$ و n من $\mathbb{Z}$ لدينا : $z^n = r^n.e^{in\theta}$.

- **ملحوظة:**

إذا كانت U هي مجموعة الأعداد العقدية التي معيارها 1 فإن : $U = \{e^{i\theta} / \theta \in \mathbb{R}\}$

و صور عناصر المجموعة U في المستوى العقدي (P) تنتمي إلى الدائرة المثلثية

لأن : $\forall \theta \in \mathbb{R} : |e^{i\theta}| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$.

3)- صيغتا أولير و إخطاط $\cos^n\theta$ و $\sin^n\theta$ حيث $n \ge 2$:

- **خاصية14:** (صيغتا أولير)

لكل θ من $\mathbb{R}$ لدينا : $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ و $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$.

و بصفة عامة ،

لكل n من $\mathbb{Z}$ لدينا : $\cos n\theta = \dfrac{e^{in\theta}+e^{-in\theta}}{2}$ و $\sin n\theta = \dfrac{e^{in\theta}-e^{-in\theta}}{2i}$.

- **تمرين15:**

بين أنه لكل θ من $\mathbb{R}$ لدينا : $1+e^{i\theta} = 2\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$ و $1-e^{i\theta} = -2i\sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$

ثم إستنتج الكتابة الأسية للأعداد العقدية التالية :

$z_0 = \frac{1}{2}(3+\sqrt{3}i)$ و $z_1 = 1+\frac{\sqrt{2}}{2}(i-1)$ و $z_2 = 2+\sqrt{2}(1+i)$.

- **إخطاط $\cos^n\theta$ و $\sin^n\theta$ حيث $n \ge 2$:**

يهدف الإخطاط إلى التعبير عن $\cos^n\theta$ و $\sin^n\theta$ بدلالة $\cos k\theta$ و $\sin k\theta$
(حيث $1 \le k \le n$) و ذلك باستعمال صيغتا أولير ثم صيغة حدانية نيوتن .

- **أمثلة:**

إخطاط $\sin^4\theta$ و $\cos^5\theta$ و $\sin^5\theta$:

لدينا : $\sin^4\theta = \left(\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^4 = \dfrac{1}{16}\left(e^{4i\theta} - 4e^{2i\theta} + 6 - 4e^{-2i\theta} + e^{-4i\theta}\right)$

إذن : $\sin^4\theta = \dfrac{1}{16}(2\cos 4\theta - 8\cos 2\theta + 6) = \dfrac{3}{8} + \dfrac{1}{8}\cos 4\theta - \dfrac{1}{2}\cos 2\theta$.

و $\cos^5\theta = \left(\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^5 = \dfrac{1}{32}\left(e^{5i\theta} + 5e^{3i\theta} + 10e^{i\theta} + 10e^{-i\theta} + 5e^{-3i\theta} + e^{-5i\theta}\right)$

إذن : $\cos^5\theta = \dfrac{1}{16}\cos 5\theta + \dfrac{5}{16}\cos 3\theta + \dfrac{5}{8}\cos\theta$.

و $\sin^5\theta = \left(\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^5 = \dfrac{1}{32i}\left(e^{5i\theta} - 5e^{3i\theta} + 10e^{i\theta} - 10e^{-i\theta} + 5e^{-3i\theta} - e^{-5i\theta}\right)$

إذن : $\sin^5\theta = \dfrac{1}{16}\sin 5\theta - \dfrac{5}{16}\sin 3\theta + \dfrac{5}{8}\sin\theta$.

- **ملحوظة:** العملية التي نحسب فيها $\cos n\theta$ و $\sin n\theta$ باستعمال صيغة موافر هي عملية عكسية للعملية التي يتم فيها إخطاط $\cos^n\theta$ و $\sin^n\theta$ باستعمال صيغتا أولير .

VI- الجذور من الرتبة n لعدد عقدي غير منعدم:

1)- تعريف:

ليكن a عددا عقديا غير منعدم و n عدد صحيح طبيعي بحيث $n \geq 2$.

كل عدد عقدي z حل للمعادلة $z^n = a$ يسمى جذرا من الرتبة n (أو جذرا نونيا) للعدد العقدي a .

كل جذر من الرتبة 2 يسمى جذرا مربعا ، و كل جذر من الرتبة 3 يسمى جذرا مكعبا .

- **أمثلة:**

لإيجاد الجذور المكعبة للعدد $a = 8i$ يجب حل المعادلة : $(E): z^3 = 8i$.

لدينا : $(E) \Leftrightarrow z^3 - 8i = 0 \Leftrightarrow z^3 + (2i)^3 = 0$ لأن $i^3 = -i$.

إذن : $(E) \Leftrightarrow (z + 2i)(z^2 - 2iz - 4) = 0$.

نحل المعادلة : $(z^2 - 2iz - 4) = 0$

مميزها المختصر هو : $\Delta' = (-i)^2 + 4 = 3$ ، إذن جذريها هما :

$z_1 = -\sqrt{3} + i$ و $z_2 = \sqrt{3} + i$.

إذن للعدد $a = 8i$ ثلاثة جذور مكعبة هي : $z_0 = -2i$ و $z_1 = -\sqrt{3} + i$ و $z_2 = \sqrt{3} + i$.

- **سؤال:**

نعتبر في المستوى العقدي (P) النقط $A(z_0)$ و $B(z_1)$ و $C(z_2)$.

بين أن المثلث ABC متساوي الأضلاع رؤوسه تنتمي إلى الدائرة (C) التي مركزها O و شعاعها $R = 2$.

- **مبرهنة:**

ليكن $a = [r, \alpha]$ عددا عقديا غير منعدم n عدد صحيح طبيعي بحيث $n \geq 2$.

للعدد a ، n جذرا نونيا شكلها المثلثي هو: $z_k = \left[\sqrt[n]{r}, \dfrac{\alpha + 2k\pi}{n}\right]$ حيث $0 \leq k \leq n-1$

صورها في المستوى العقدي (P) رؤوس مضلع منتظم محاط بالدائرة التي مركزها O و شعاعها $R = \sqrt[n]{r}$.

- **مثال:**

لنحدد الجذور الرابعة للعدد $a = -64$.

نكتب العدد $a = -64$ على الشكل المثلثي ، لدينا $a = [64, \pi]$ و لنضع : $z = [r, \theta]$

إذن : $z^4 = a \Leftrightarrow [r^4, 4\theta] = [64, \pi]$

و هذا يعني أن : $r = \sqrt[4]{64} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ و $\theta = \dfrac{(2k+1)\pi}{4}$ حيث $0 \leq k \leq 3$

إذن الجذور الرابعة للعدد $a = -64$ هي : $z_k = \left[2\sqrt{2}, \dfrac{(2k+1)\pi}{4}\right]$ حيث $0 \leq k \leq 3$.

أي : $z_0 = \left[2\sqrt{2}, \dfrac{\pi}{4}\right]$ و $z_1 = \left[2\sqrt{2}, \dfrac{3\pi}{4}\right]$ و $z_2 = \left[2\sqrt{2}, \dfrac{5\pi}{4}\right]$ و $z_3 = \left[2\sqrt{2}, \dfrac{7\pi}{4}\right]$.

- **تمرين16:**

أكتب على الشكل المثلثي العدد العقدي $a = 1 - i$ ، ثم إستنتج جذوره من الرتبة 5 .

2)- الجذور النونية للوحدة:

- **تعريف:**

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا بحيث $n \geq 2$.

كل عدد عقدي z حل للمعادلة $z^n = 1$ يسمى جذرا نونيا للوحدة .

- **مثال:**

أكتب على الشكل المثلثي العدد العقدي $j = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ، ثم تحقق من أن j و $\overline{j}$ جذرين مكعبين للوحدة ، و أن $j^2 = \overline{j}$.

- **خاصية15:**

الجذور النونية للوحدة هي الأعداد العقدية $z_k = \left[1, \dfrac{2k\pi}{n}\right]$ حيث $0 \leq k \leq n-1$

و صورها في المستوى العقدي (P) رؤوس مضلع منتظم محاط بالدائرة المثلثية .

- **تمرين17:**

لتكن z_k ، $0 \leq k \leq n-1$ الجذور النونية للوحدة .

بين ما يلي :

(1): مجموع الجذور النونية للوحدة منعدم أي أن $\sum_{k=0}^{n-1} z_k = 0$: (1) .

و (2): مقلوب و مرافق جذر نوني للوحدة هو أيضا جذر نوني للوحدة .

و (3): جداء جذرين نونيين للوحدة هو أيضا جذر نوني للوحدة .

- **ملحوظة:**

إذا علمنا جذرا نونيا z لعدد عقدي غير منعدم a ، فإن جذور a من الرتبة n هي الأعداد العقدية : $z_k = z.\left[1, \frac{2k\pi}{n}\right]$ ، حيث $0 \le k \le n-1$.

- **تمرين18:**

أ- أحسب $(1-i)^3$ ، ثم إستنتج الجذور المكعبة للعدد العقدي $a = -2(1+i)$.

ب- حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E): \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^3 + 2(1+i) = 0$.

VII- تطبيقات هندسية للأعداد العقدية:

1)- الصيغة العقدية لدوران:

ليكن r دورانا في المستوى العقدي (P) مركزه النقطة $\Omega(\omega)$ و زاويته α .

لكل نقطتين $M(z)$ و $M'(z')$ من (P) بحيث $M \ne \Omega$ ، لدينا :

$$r(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ \left(\overline{\Omega M}, \overline{\Omega M'}\right) \equiv \alpha[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z'-\omega| = |z-\omega| \\ \arg\left(\frac{z'-\omega}{z-\omega}\right) \equiv \alpha[2\pi] \end{cases}$$

إذن : $r(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} \left|\frac{z'-\omega}{z-\omega}\right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z'-\omega}{z-\omega}\right) \equiv \alpha[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \frac{z'-\omega}{z-\omega} = e^{i\alpha}$

و بالتالي فإن : $r(M) = M' \Leftrightarrow z' = e^{i\alpha}(z-\omega)+\omega$.

- **خاصية16:**

التطبيق r من (P) نحو (P) و الذي يربط كل نقطة $M(z)$ بالنقطة $M'(z')$ بحيث :

$z' = e^{i\alpha}(z-\omega)+\omega$ دوران مركزه النقطة $\Omega(\omega)$ و زاويته α .

- **تمرين19:** بين أن التطبيق r الذي يربط النقطة $M(z)$ بالنقطة $M'(z')$ بحيث :

$z' = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}+i\right)z - 4 + 2i$ ، دوران و حدد زاويته و مركزه .

2)- التأويل الهندسي للتطبيق: $f: z \mapsto az+b$ **حيث** $a \in \mathbb{C}-\{1\}$ **و** $|a|=1$ **:**

- **تمرين20:**

نعتبر التطبيق T من (P) نحو (P) و الذي يربط النقطة $M(z)$ بالنقطة $M'(z')$

بحيث : $z' = az+b$ حيث : $a \in \mathbb{C}-\{1\}$ و $|a|=1$.

أ- بين أن T يقبل نقطة صامدة وحيدة Ω ينبغي تحديد لحقها ω .

ب- تحقق من أن : $\forall z \in \mathbb{C}: z' = a(z-\omega)+\omega$ ، ثم إستنتج طبيعة التطبيق T

و حدد العناصر المميزة له .

- **خاصية17:**

التطبيق T من (P) نحو (P) و الذي يربط كل نقطة $M(z)$ بالنقطة $M'(z')$ بحيث :

$z' = az+b$ حيث $a \in \mathbb{C}-\{1\}$ و $|a|=1$ ، دوران مركزه النقطة $\Omega\left(\frac{b}{1-a}\right)$

و زاويته α حيث $\alpha \equiv \arg(a)[2\pi]$.

- **تمرين21:**

في المستوى العقدي (P) نعتبر النقط $A(2+3i)$ و $B(4-i)$ و $C(10+2i)$

T و T' تطبيقين من (P) نحو (P) بحيث :

$T(M) = M' \Leftrightarrow z' = jz$ و $T'(M) = M'' \Leftrightarrow z'' = (1+j)z$

حيث $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \left[1, \frac{2\pi}{3}\right]$.

أ- بين أن المثلث ABC قائم الزاوية في النقطة B ، ثم حدد طبيعة التحويلين T و T' .

ب- حدد ثم أنشىء $A'B'C'$ ، (D') و (C') صور المثلث ABC ، المستقيم (D)

الذي معادلته : $2(z+\overline{z}) - 3i(z-\overline{z}) + 2 = 0$ و الدائرة (C) التي معادلتها

$|z-(2+3i)| = \sqrt{13}$ على التوالي بالتحويل T .

abouzakariya@yahoo.fr

Abdellah BEN ELKHATIR – Lycée alfath – Khémisset