- **الكتابة الجبرية لعدد عقدي:**

عناصر المجموعة $\mathbb{C}$ تكتب على شكل $z=a+ib$ حيث $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ و i عنصر غير حقيقي يحقق $i^2=-1$ ، $a+ib$ تسمى الكتابة الجبرية للعدد الجبرية للعدد العقدي z .

a يسمى الجزء الحقيقي ل z و b الجزء التخيلي ل z و نكتب $a=\mathrm{Re}(z)$ و $b=\mathrm{Im}(z)$

كل عنصر من المجموعة : $i\mathbb{R}^*=\{ib / b\in\mathbb{R}^*\}$ يسمى عددا عقديا تخيليا صرفا و لدينا :

$z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow b=0\Leftrightarrow \mathrm{Im}(z)=0$ و $z\in i\mathbb{R}\Leftrightarrow a=0\Leftrightarrow \mathrm{Re}(z)=0$.

- **العمليات في المجموعة $\mathbb{C}$:**

لكل عددين عقديين $z=a+ib$ و $z'=a'+ib'$ لدينا :

$z+z'=(a+a')+i(b+b')$ و $z.z'=(aa'-bb')+i(ab'+a'b)$

و إذا كان $z'\neq 0$ فإن : $\frac{z}{z'}=\frac{(aa'+bb')+i(a'b-ab')}{a'^2+b'^2}$ و $\frac{1}{z'}=\frac{a'-ib'}{a'^2+b'^2}$.

- **مرافق عدد عقدي:**

العدد العقدي $a-ib$ يسمى مرافق $z=a+ib$ و يرمز له بالرمز $\overline{z}$ ، إذن : $\overline{z}=a-ib$

و لدينا : $a=\mathrm{Re}(z)=\frac{1}{2}(z+\overline{z})$ و $b=\mathrm{Im}(z)=\frac{1}{2i}(z-\overline{z})$.

$z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\overline{z}=z$ و $z\in i\mathbb{R}\Leftrightarrow\overline{z}=-z$.

لكل z و z' من $\mathbb{C}$ لدينا: $\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$ و $\overline{z.z'}=\overline{z}.\overline{z'}$ و $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ $(z'\neq 0)$

$\forall(n,z)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{C}^*:\overline{z^n}=(\overline{z})^n$ و $\forall(\alpha,z)\in\mathbb{R}\times\mathbb{C}:\overline{\alpha.z}=\alpha.\overline{z}$.

- **معيارعدد عقدي:**

العدد الموجب $\sqrt{a^2+b^2}$ يسمى معيار العدد العقدي $z=a+ib$ و يرمز له بالرمز $|z|$

و لكل z من $\mathbb{C}$ لدينا: $|-z|=|\overline{z}|=|-\overline{z}|=|z|$ و $|z^2|=|z|^2=z.\overline{z}$.

لكل z و z' من $\mathbb{C}$ لدينا : $|z.z'|=|z|.|z'|$ و إذا كان $z\neq 0$ فإن : $\forall n\in\mathbb{Z}:|z^n|=|z|^n$.

و إذا كان $z'\neq 0$ فإن : $\left|\frac{z}{z'}\right|=\frac{|z|}{|z'|}$ ، و بصفة خاصة : $\left|\frac{1}{z'}\right|=\frac{1}{|z'|}$.

و لكل z و z' من $\mathbb{C}$ لدينا : $\big||z|-|z'|\big|\le|z\pm z'|\le|z|+|z'|$.

- **التمثيل الهندسي لعدد عقدي:**

كل نقطة $M(a,b)$ من المستوى (P) المنسوب إلى معلم متعامد و ممنظم $(O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$ تسمى صورة للعدد العقدي $z=a+ib$ و z يسمى لحق النقطة M أو المتجهة $\overrightarrow{OM}$ ، نكتب : $z=aff(M)=aff(\overrightarrow{OM})$ أو باختصار $M(z)$ ، و لدينا : $|z|=\|\overrightarrow{OM}\|$.

و لكل نقطتين $A(z_A)$ و $B(z_B)$ من المستوى العقدي (P) لدينا : $AB=|z_B-z_A|$.

لكل أربع نقط $M(z)$ و $N(\overline{z})$ و $P(-z)$ و $Q(-\overline{z})$ من (P) لدينا :

$N=s_{(Ox)}(M)$ و $P=s_O(M)$ و $Q=s_{(Oy)}(M)$ و الرباعي $MNPQ$ مستطيل مركزه النقطة O .

$\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ و $\forall(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2})\in V_2$: $aff(\alpha\overrightarrow{u_1}+\beta\overrightarrow{u_2})=\alpha aff(\overrightarrow{u_1})+\beta aff(\overrightarrow{u_2})$

و $\forall M;N\in(\mathrm{P}):\ aff(\overrightarrow{MN})=aff(\overrightarrow{ON})-aff(\overrightarrow{OM})=aff(N)-aff(M)$.

إذا كان : $\alpha+\beta\neq 0$ و $G=bar\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$ فإن : $z_G=\frac{\alpha z_A+\beta z_B}{\alpha+\beta}$.

و لدينا أيضا :

$z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow M(z)\in(Ox)$ و $z\in i\mathbb{R}\Leftrightarrow M(z)\in(Oy)$

و بصفة خاصة : $\begin{cases} z\in\mathbb{R}_+\Leftrightarrow M(z)\in[Ox) \\ z\in\mathbb{R}_-\Leftrightarrow M(z)\in[Ox') \end{cases}$ و $\begin{cases} z\in i\mathbb{R}_+\Leftrightarrow M(z)\in[Oy) \\ z\in i\mathbb{R}_-\Leftrightarrow M(z)\in[Oy') \end{cases}$.

- **عمدة عدد عقدي غير منعدم:**

إذا كان z عددا عقديا غير منعدم و M نقطة من (P) لحقها z فكل قياس للزاوية الموجهة $(\widehat{\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{OM}})$ يسمى عمدة z و يرمز له ب $\arg(z)$ ، إذن : $\arg(z)\equiv(\widehat{\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{OM}})[2\pi]$.

إذا كان $z=a+ib$ و $\theta\equiv\arg(z)[2\pi]$ فإن : $a=|z|\cos\theta$ و $b=|z|\sin\theta$

إذن : $z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)$ و تسمى هذه الكتابة الشكل المثلثي للعدد العقدي z .

نكتب باختصار $z=[r,\theta]$ حيث $r=|z|$ و $\theta\equiv\arg(z)[2\pi]$.

لدينا : $z\in\mathbb{R}_+^*\Leftrightarrow\arg(z)\equiv 0[2\pi]$ و $z\in\mathbb{R}_-^*\Leftrightarrow\arg(z)\equiv\pi[2\pi]$

$z\in i\mathbb{R}_+^*\Leftrightarrow\arg(z)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ و $z\in i\mathbb{R}_-^*\Leftrightarrow\arg(z)\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]$

و بصفة عامة : $z \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg(z) \equiv 0[\pi]$ و $z \in i\mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$.

إذا كان $z = [r,\theta]$ فإن : $\overline{z} = [r,-\theta]$ و $-z = [r,\pi+\theta]$ و $-\overline{z} = [r,\pi-\theta]$.

و لكل n من $\mathbb{Z}$ لدينا : $z^n = [r^n, n\theta]$ و تسمى هذه العلاقة صيغة موافر .

و إذا كان $z = [r,\theta]$ و $z' = [r',\theta']$ فإن : $zz' = [rr', \theta+\theta']$ و $\frac{z}{z'} = \left[\frac{r}{r'}, \theta-\theta'\right]$.

صيغ هامة لتحديد الشكل المثلثي لعدد عقدي غير منعدم:

مهما يكن θ من $\mathbb{R}$ لدينا :

$$\cos\theta - i\sin\theta = \cos-\theta + i\sin-\theta$$
$$-\cos\theta + i\sin\theta = \cos(\pi-\theta) + i\sin(\pi-\theta)$$
$$-\cos\theta - i\sin\theta = \cos(\pi+\theta) + i\sin(\pi+\theta)$$
$$\sin\theta + i\cos\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$
$$-\sin\theta + i\cos\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$$
$$-\sin\theta - i\cos\theta = \cos-\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) + i\sin-\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$$

- **زاوية متجهتين غيرمنعدمتين:**

لكل نقطتين مختلفتين A و B من (P) لدينا: $\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{AB}\right) \equiv \arg(z_B - z_A)[2\pi]$.

و لكل أربع نقط مختلفة مثنى مثنى A و B و C و D من (P) لدينا :

$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)[2\pi]$ و $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)[2\pi]$.

تكون النقط A و B و C مستقيمية إذا و فقط إذا كان : $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}^*$.

و $\arg\left(\frac{z_C - z_B}{z_C - z_A}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_D - z_B}{z_D - z_A}\right)[\pi] \Leftrightarrow$ (A و B و C و D مستقيمية أو متداورة).

و يكون المثلث ABC قائم الزاوية في A إذا و فقط إذا كان : $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}^*$.

و بصفة عامة : $(AB) \perp (CD) \Leftrightarrow \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}^*$.

- **الترميز الأسي لعدد عقدي غير منعدم:**

لكل θ من $\mathbb{R}$ نضع : $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

و إذا كان z عددا عقديا غير منعدم بحيث $|z| = r$ و $\arg(z) \equiv \theta[2\pi]$ فإن : $z = re^{i\theta}$

و تسمى هذه الكتابة بالشكل الأسي .

لكل (θ,θ') من $\mathbb{R}^2$ و لكل n من $\mathbb{Z}$ لدينا :

$e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$ و $e^{i\theta}/e^{i\theta'} = e^{i(\theta-\theta')}$ و $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$ (صيغة موافر)

$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ و $\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$ (صيغتا أولير)

و بصفة عامة : $\cos n\theta = \frac{e^{in\theta} + e^{-ni\theta}}{2}$ و $\sin n\theta = \frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i}$.

- **المعادلات من الدرجة الثانية في $\mathbb{C}$:**

لكل عدد عقدي غير منعدم a جذرين مربعين متقابلين هما حلي المعادلة $z^2 = a$ في $\mathbb{C}$.

إذا كان $a \in \mathbb{R}_+^*$ فإن جذريه المربعين هما : $z_1 = \sqrt{a}$ و $z_2 = -\sqrt{a}$.

إذا كان $a \in \mathbb{R}_-^*$ فإن جذريه المربعين تخيليين صرفين هما : $z_1 = i\sqrt{-a}$ و $z_2 = -i\sqrt{-a}$.

و إذا كان $a = \alpha + i\beta$ حيث $\beta \in \mathbb{R}^*$ فإن جذريه المربعين يكتبان على شكل $z = x + iy$

حيث الزوج (x,y) حل للنظمة :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \\ x^2 - y^2 = \alpha \\ 2xy = \beta \end{cases}$$.

لحل المعادلة : $(E): az^2 + bz + c = 0$ في $\mathbb{C}$ حيث $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$

نحسب مميزها : $\Delta = b^2 - 4ac$

إذا كان $\Delta = 0$ فإن المعادلة (E) تقبل حلا وحيدا هو : $z_0 = \frac{-b}{2a}$.

و إذا كان $\Delta \neq 0$ فإنه يقبل جذرين مربعين متقابلين : δ و $-\delta$ ($\delta^2 = \Delta$) و المعادلة (E)

تقبل حلين مختلفين هما : $z_1 = \frac{-b-\delta}{2a}$ و $z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$.

و بصفة خاصة : إذا كانت معاملات المعادلة (E) أعدادا حقيقية و كان $\Delta<0$ فإن الجذرين المربعين ل Δ هما : $\delta=i\sqrt{-\Delta}$ و $-\delta=-i\sqrt{-\Delta}$.

و حلي المعادلة (E) عددين عقديين مترافقين و هما :

$z_1=\dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ و $z_2=\dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ ($\overline{z_2}=z_1$) .

- **الجذور النونية لعدد عقدي غير منعدم:**

ليكن $a=[r,\alpha]$ عددا عقديا غير منعدم و n عدد صحيح طبيعي بحيث $n\geq 2$.

للعدد a ، n جذرا نونيا شكلها المثلثي هو: $z_k=\left[\sqrt[n]{r},\dfrac{\alpha+2k\pi}{n}\right]$ حيث $0\leq k\leq n-1$.

و صورها في المستوى العقدي (P) رؤوس مضلع منتظم محاط بالدائرة التي مركزها O و شعاعها $R=\sqrt[n]{r}$.

و بصفة خاصة:

للوحدة n جذرا نونيا شكلها المثلثي و الأسي هو: $z_k=\left[1,\dfrac{2k\pi}{n}\right]=e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ ، $0\leq k\leq n-1$

و صورها في المستوى العقدي (P) رؤوس مضلع منتظم محاط بالدائرة المثلثية .

- **تطبيقات هندسية للأعداد العقدية:**

في المستوى العقدي (P) المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$ لدينا :

($ABCD$ متوازي أضلاع) $\Leftrightarrow$ $z_C-z_D=z_B-z_A$

($ABCD$ مستطيل) $\Leftrightarrow$ $z_C-z_D=z_B-z_A$ و $\dfrac{z_D-z_A}{z_B-z_A}\in i\mathbb{R}^*$ و

($ABCD$ معين) $\Leftrightarrow$ $z_C-z_D=z_B-z_A$ و $\dfrac{z_D-z_B}{z_C-z_A}\in i\mathbb{R}^*$ و

($ABCD$ مربع) $\Leftrightarrow$ $\dfrac{z_D-z_A}{z_B-z_A}\in i\mathbb{R}^*$ و $\dfrac{z_D-z_B}{z_C-z_A}\in i\mathbb{R}^*$ و .

ليكن T تطبيقا من (P) نحو (P) يربط كل نقطة $M(z)$ بالنقطة $M'(z')$ بحيث : $z'=f(z)$ و f تطبيق من $\mathbb{C}$ نحو $\mathbb{C}$.

طبيعة التحويل T مرتبطة بالصيغة العقدية للتطبيق f ، و الجدول التالي يلخص طبيعة T تبعا لصيغة f .

الصيغة العقدية للتطبيق f	طبيعة التحويل T و عناصره المميزة
$z'=z+z_0$	إزاحة متجهتها $\vec{u}$ حيث $z_0=aff(\vec{u})$
$z'=k(z-\omega)+\omega$	تحاك مركزه Ω و نسبته k حيث $\omega=aff(\Omega)$
$z'=e^{i\alpha}(z-\omega)+\omega$	دوران مركزه Ω و زاويته α حيث $\omega=aff(\Omega)$
$z'=az+b$ حيث $\|a\|=1$ و $a\neq 1$	دوران مركزه Ω و زاويته α حيث $\dfrac{b}{1-a}=aff(\Omega)$ و $\alpha\equiv\arg(a)[2\pi]$.
$z'=-z$	تماثل مركزي مركزه النقطة O
$z'=\overline{z}$	تماثل محوري محوره (Ox)
$z'=-\overline{z}$	تماثل محوري محوره (Oy)
$z'=i\overline{z}$	تماثل محوري محوره المنصف الأول $(D):y=x$

Abdellah BEN ELKHATIR – Lycée alfath – Khémisset
abouzakariya@yahoo.fr